UNIVERSIDAD NACIONAL DE SANTIAGO DEL ESTERO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y TECNOLOGÍAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

FUNCIONES REALES

PROGRAMA DE ESTUDIO

Año 2011

Carrera:

Licenciatura en Matemática (LM1)

Equipo Docente:

Lic. Marta Isabel CARRIZO de NEMIÑA
Lic. María José BENAC

1.- IDENTIFICACIÓN

Asignatura: **FUNCIONES REALES**

Carrera: **Licenciatura en Matemática**

Plan de Estudios: **Resolución HCD Nº 145/2000** - **Resolución HCD Nº 212/2004**

Módulo - Año: **6º Módulo – 3º Año**

Correlativas Anteriores:

Aprobadas: **Todas las asignaturas del 1º al 3º Módulo inclusive**

Regular: **Análisis Matemático III** (4º Módulo)

Correlativa Posterior: **Trabajo Final**

Objetivos establecidos en el Plan de Estudios: **Ninguno**

Contenidos mínimos establecidos en el Plan de Estudios:

Carga Horaria semanal y total: **8 horas / 120 horas**

Año académico: **2011**

2.- PRESENTACIÓN

La asignatura Funciones Reales es un tramo del Análisis Real y tiene como parte esencial la medida y la integral de Lebesgue.

La teoría de la medida y de la integración desarrollada por Henri Lebesgue a principios del siglo XX, representan un aporte de gran importancia al análisis matemático moderno. La medida y la integración de Lebesgue tienen muchas ventajas sobre la integración ordinaria de Riemann tanto en las aplicaciones como en la teoría misma, ya que permitió superar las dificultades que presentaba la noción clásica de integral. Es considerada indispensable en los fundamentos de varios campos de la matemática, como por ejemplo la Teoría de las Probabilidades y la Estadística, las series e integrales de Fourier y las Ecuaciones Diferenciales. Es también requerida, en la actualidad, para el tratamiento de muchos problemas de ciencias y de ingeniería.

Para iniciarse en el estudio de la asignatura Funciones Reales, se requiere que el estudiante maneje con fluidez conceptos y resultados impartidos en las asignaturas Álgebra I, Álgebra II, Análisis Matemático I, Análisis Matemático II, Análisis Matemático III y Topología.

3.- OBJETIVOS

OBJETIVOS GENERALES

Que el Estudiante:

- Adquiera los conceptos básicos y esenciales de la teoría de la medida y de la integración de Lebesgue.
- Relacione y aplique los conocimientos adquiridos con rigor científico.
- Desarrolle su habilidad y capacidad de razonamiento y abstracción.
- Genere estrategias para plantear y resolver problemas.
- Reafirme su sentido de respeto por las personas y por el medio ambiente
- Se sienta comprometido con sus estudios y en la búsqueda de la calidad de vida de la sociedad

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Que el estudiante:

- Reconozca a las funciones medibles y opere con ellas
- Conozca el concepto de medida y las propiedades de la medida.
- Comprenda aquellas afirmaciones que son válidas en casi todo punto.
- Identifique a las funciones simples y medibles y sepa determinar su representación standard.
- Adquiera habilidad en el cálculo de integrales de funciones simples, medibles y no negativas y de funciones medibles y no negativas, en un espacio medido.
- Sepa aplicar tanto el Teorema de la Convergencia Monótona (Teorema de Beppo Levi) como el Lema de Fatou.
- Comprenda el concepto de función sumable o integrable y el de la integral de estas funciones.
- Sepa analizar sucesiones de funciones integrables y aplicar el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue cuando corresponda.
- Reconozca los espacios vectoriales normados L_p con $1 \leq p < \infty$, L_∞ y opere en ellos.
- Maneje los conceptos de convergencia en L_p.
- Adquiera habilidad para descomponer medidas, para extender medidas y para determinar la medida de un espacio producto.
- Desarrolle habilidades y estrategias, tácticas y procesos de razonamiento, propios del pensamiento matemático, para el análisis, planteo, modelación matemática y resolución de problemas.
- Desarrolle la capacidad de trabajar en forma cooperativa

4.- SELECCIÓN Y ORGANIZACIÓN DE CONTENIDOS

FUNCIONES REALES

PROGRAMA ANALÍTICO - AÑO 2011

Unidad Nº 1: INTRODUCCIÓN

El cuerpo **R** de los números reales. El sistema $\overline{\mathbf{R}}$ extendido de los números reales. Operaciones algebraicas entre los símbolos $+\infty$, $-\infty$ y elementos $x \in \mathbf{R}$.

Unidad Nº 2: FUNCIONES MEDIBLES

Álgebra. σ-álgebra $\mathcal{X}$. Espacio medible $(X, \mathcal{X})$. Conjunto medible. Propiedades de las σ-álgebras. Caracterización de una σ-álgebra. σ-álgebra mínima generada por una familia. La σ-álgebra de Borel. Conjunto de Borel o boreliano. Función $\mathcal{X}$-medible. Propiedades. Algunas funciones medibles usuales (función constante, función característica, funciones continuas, etc.). Operaciones algebraicas de funciones medibles ($c\,f$, f^2, $f+g$, $f\,.g$, f/g con $g \neq 0$, $|f|$). Partes positiva y negativa de una función. Propiedad de la parte positiva y la parte negativa de una función medible. Funciones a valores reales ampliados medibles. Los conjuntos $A_{+\infty}$ y $A_{-\infty}$. Caracterización de las funciones a valores reales ampliados medibles. Funciones a valores reales ampliados medibles especiales. Proposiciones. Lema de aproximación para funciones medibles.

Unidad Nº 3: MEDIDA

Medida μ. Medida finita. Medida σ-finita. Lema. Algunas medidas especiales (δ de Dirac, la medida de contar en el conjunto **N** de los números naturales, la medida de Lebesgue, la medida de Stieltjes – Borel generada por una función). Proposiciones. Espacio medido $(X, \mathcal{X}, \mu)$. Proposiciones que son válidas casi en todas partes. Carga. Propiedades.

Unidad Nº 4: LA INTEGRAL

El conjunto $M(X, \mathcal{X})$ de las funciones a valores reales ampliados medibles y el conjunto $M^+(X, \mathcal{X})$ de las funciones a valores reales ampliados medibles no negativas, definidos en un espacio medido fijo $(X, \mathcal{X}, \mu)$. Función simple. Operaciones con funciones simples. Función simple medible. Representación standard de una función simple medible. Integral de una función simple de $M^+(X, \mathcal{X})$. Propiedades. Integral de una función de $M^+(X, \mathcal{X})$. Propiedades de monotonía. Teorema de la Convergencia Monótona (o Teorema de Beppo Levi). Otras propiedades de la integral de funciones de $M^+(X, \mathcal{X})$. Lema de Fatou. Una medida expresada en términos de la integral de una función de $M^+(X, \mathcal{X})$. Propiedad de las funciones de $M^+(X, \mathcal{X})$ que son nulas casi en todo punto. Medida absolutamente continua. Propiedad. Generalización del Teorema de la Convergencia Monótona. Generalización del Teorema de la Convergencia Monótona en términos de series.

Unidad Nº 5: FUNCIONES SUMABLES O INTEGRABLES

Función μ-sumable en un espacio medido fijo $(X, \mathcal{X}, \mu)$. El conjunto L $(X, \mathcal{X}, \mu)$ de las funciones de $M(X, \mathcal{X})$ que son μ-sumables. La integral de una función perteneciente a L $(X, \mathcal{X}, \mu)$. Proposiciones. Propiedad de la integrabilidad absoluta.

El espacio vectorial L $(X, \mathcal{X}, \mu)$. Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue.

Unidad Nº 6: LOS ESPACIOS L_P DE LEBESGUE

Seminorma. Norma. Espacio vectorial normado. Métrica. Espacio métrico. Espacio métrico completo. Espacio de Banach. Producto interior. Propiedades. Norma inducida por un producto interior. Espacio de Hilbert.

Relación "μ-equivalente" de funciones de $L(X, \mathcal{X}, \mu)$. Espacio de Lebesgue $L_1 = L_1(X, \mathcal{X}, \mu)$ y la norma $\| \|_1$ definida en L_1.

Los espacios de Lebesgue $L_p = L_p(X, \mathcal{X}, \mu)$, con $1 \leq p < \infty$ y la norma $\| \|_p$ definida en L_P. Índices conjugados. Desigualdad de Hölder. Desigualdad de Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz. Desigualdad de Minkowski. Sucesiones de Cauchy. Sucesiones convergentes. Espacios completos. Lema. Teorema de Completitud de los espacios L_p con $1 \leq p < \infty$ (o Teorema de Fisher Riesz). El espacio vectorial normado L_∞. Resultados. Teorema de completitud del espacio L_∞.

Unidad Nº 7: MODOS DE CONVERGENCIA

Convergencia en L_p. Proposiciones. Convergencia en medida. Proposiciones. Convergencia casi uniforme. Proposiciones. Teorema de Egoroff. Teorema de convergencia de Vitali.

Unidad Nº 8: DESCOMPOSICIÓN DE MEDIDAS

Conjuntos medibles positivos, negativos y nulos con respecto a una carga. Propiedades. Teorema de descomposición de Hahn. Proposiciones. Variaciones positivas y negativas de una carga. Variación total de una carga. Teorema de descomposición de Jordan. Proposición. Medida absolutamente continua con respecto a otra medida. Carga absolutamente continua con respecto a otra carga. Proposición. Teorema de Radon-Nikodym. Medidas mutuamente singulares. Teorema de descomposición de Lebesgue. Funcionales lineales sobre L_P. Teoremas de representación de Riesz.

Unidad Nº 9: GENERACIÓN DE MEDIDAS

Álgebra. Medida sobre un álgebra. Lema. Extensión de medidas. Propiedades. Teorema de Extensión de Hahn. Medida de Lebesgue. Medida de Borel-Stieltjes.

Unidad Nº 10: PRODUCTO DE MEDIDAS

Producto cartesiano de dos espacios medibles. σ-álgebra producto. Producto cartesiano de dos espacios medidos. Medida producto, Teorema. Sección horizontal y sección vertical de un subconjunto de la σ-álgebra producto. Sección horizontal y sección vertical de una función definida en la σ-álgebra producto y a valores reales extendido. Lemas. Teorema e Tonelli. Teorema de Fubini.

Lic. Marta Isabel CARRIZO de NEMIÑA

TRABAJOS PRÁCTICOS: PROGRAMA Y CRONOGRAMA

Trabajo Práctico Nº 1	Unidades 1 y 2.	Una semana
Trabajo Práctico Nº 2	Unidad 3	Dos semanas
Trabajo Práctico Nº 3	Unidad 4	Dos semanas
Trabajo Práctico Nº 4	Unidad 5	Dos semanas
Trabajo Práctico Nº 5	Unidad 6	Dos semanas
Trabajo Práctico Nº 6	Unidad 7	Dos semanas
Trabajo Práctico Nº 7	Unidad 8	Dos semanas
Trabajo Práctico Nº 8	Unidades 9 y 10	Dos semanas

5.- BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA ESPECÍFICA

- **Bartle, Robert**. *The Elements of Integration.* EEUU. Ed. John Wiley & Sons, Inc.
- **Fava, Norberto – Zo, Felipe.** *Medida e Integral de Lebesgue.* Buenos Aires. Argentina. Red Olímpica. Olimpíadas Matemática Argentina.
- **Cerdà, Joan.** *Análisis Real*. 2º Edición. Edicions de la Universitat de Barcelona. España.
- **Natanson, I. P.** *Theory of functions of a real variable.* Frederick Ungar Publishing Co. New York.
- **Wheeden, Richard - Zygmund, Antoni.** *Measure and integral*. Marcel Dekker Inc. New York.

BIBLIOGRAFÍA GENERAL

- **Zamansky, Marc.** *Introducción al Álgebra y Análisis Moderno.*Ed. Montaner y Siomon, S.A. Barcelona, España.
- **Apostol, Tom.** *Análisis Matemático.* Segunda Edición. Editorial Reverté, S.A. España
- **Apostol, Tom.** *Análisis Matemático.* Ed. Reverté, S.A. Barcelona, España.
- **Dieudonné, J.** *Fundamentos de Análisis Moderno*. Editorial Reverté, S.A. España
- **Dieudonné, J.** *Elementos de Análisis. Tomo II*. Editorial Reverté, S.A. España
- **Kolmogorov, A. N.** *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional.* Ed. Mir. Moscú.
- **Rudín, Walter.** *Análisis funcional*. Editorial Reverté, S.A. España
- **Ulyánov, Piotr – Dyachenko, Mijail.** *Análisis Real. Medida e Integración*. Addison Wesley. Universidad Autónoma de Madrid.

6.- ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

ASPECTOS PEDAGÓGICOS Y DIDÁCTICOS

Para llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura, la estrategia metodológica adoptada es la de combinar técnicas de trabajo individual y grupal con apoyo informático, y clases expositivas orientadoras (en temas que por su complejidad necesitan de la explicación del docente).

Para desarrollar la asignatura se dispone de ocho horas reloj por semana repartidas en clases teórico-prácticas y clases prácticas. Además, se destina 4 horas semanales adicionales de Consultas.

ACTIVIDADES DE LOS ALUMNOS Y DEL DOCENTE

En las clases teórico-prácticas se desarrollan temáticas previstas en la programación analítica mediante la técnica grupal y/o clases expositivo-dialogadas. Los estudiantes participan en demostraciones de teoremas bajo la dirección del docente. En las clases prácticas los alumnos analizan y resuelven ejercicios y problemas de aplicación planteados en las Guías de Trabajos Prácticos, bajo la supervisión y asesoramiento del docente.

En horarios de consulta, el docente resuelve las dudas de los alumnos y crea un clima propicio para que el proceso de incorporación, de aplicación y de transferencia de conocimientos sea significativo.

CUADRO SINTÉTICO

Clases	Carga horaria	Asistencia (%)	N° de alumnos	A cargo de	Técnica más usada	Énfasis en	Actividad de los alumnos
Teórico-Práctica	4 hs.	------	4	1 Prof. Titular	Grupal y expositiva-dialogada	Manejo conceptual, demostraciones	Anotan, preguntan y aportan ideas, conocimiento resuelven
Práctica	4 hs	-----	4	1 JTP	Grupal	Resolución de ejercicios y problemas	Aportan ideas, conocimiento resuelven
Consulta	4 hs	------	4	1 Prof. Titular 1 JTP	Individual o grupal	Aportes de los alumnos	Pregunta/n, dialoga/n, anota/n

RECURSOS DIDÁCTICOS

Los recursos usados en el desarrollo de las actividades de la asignatura Funciones Reales son:

- Bibliografía General y Específica
- Notas de la Cátedra
- Guías de Trabajos Prácticos

Entre estos recursos didácticos tiene prioridad la bibliografía recomendada, la que constituye una fuente indispensable para el estudio del Análisis Real.

.

7.- EVALUACIÓN

EVALUACIÓN FORMATIVA

Se lleva a cabo mediante trabajos grupales o individuales. Estas tareas consisten en demostraciones de propiedades y la resolución de problemas de aplicación. El docente registra la participación de cada estudiante teniendo presente los Criterios de Evaluación y le asigna un concepto de acuerdo a la escala de valoración correspondiente.

EVALUACIONES PARCIALES

Se ha previsto tres Evaluaciones Teórico-Prácticas y la Recuperación de cada una de ellas. Estas consisten en preguntas conceptuales y en ejercicios y/o problemas.

PROGRAMA Y CRONOGRAMA DE EVALUACIONES PARCIALES

Evaluación N° 1	Unidades 1, 2, 3 y 4	1º Semana de Septiembre
Recuperación Evaluación N° 1	Unidades 1, 2, 3 y 4	3º Semana de Septiembre
Evaluación N°2	Unidades 5, 6 y 7	1º Semana de Octubre
Recuperación Evaluación N° 2	Unidades 5, 6 y 7	3º Semana de Octubre
Evaluación N° 3	Unidades 8, 9 y 10	2º Semana de Noviembre
Recuperación Evaluación N° 3	Unidades 8, 9 y 10	3º Semana de Noviembre

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Los contenidos que se tienen presente para evaluar el proceso de apropiación de saberes son:

Contenidos conceptuales

- Comprensión y aplicación de conceptos con rigor científico
- Demostraciones de teoremas con razonamiento lógico-matemático
- Conocimiento y manejo fluido del lenguaje lógico-formal de la Matemática

Contenidos procedimentales

- Análisis, interpretación y modelación matemática de problemas
- Estrategias y procesos de razonamiento
- Representación gráfica en a través de diagramas y tablas

Contenidos actitudinales

- Aportes personales
- Dedicación puesta de manifiesto en clase
- Participación en el grupo
- Respeto por los integrantes del grupo y por el medio ambiente.

ESCALA DE VALORACIÓN

La escala de valoración de los Trabajos Grupales o Individuales es (E) Excelente, MB (Muy Bueno), B (Bueno), I (Insuficiente)

Las Evaluaciones y Recuperaciones son desarrolladas por los estudiantes en forma individual, y calificados con escala de 0 a 100 puntos. Se considera aprobado el alumno que alcance 60 puntos o más, y desaprobado el de menos de 60 puntos.

Al estudiante que no asiste a Evaluaciones o Recuperaciones se le asigna la calificación de cero puntos.

AUTOEVALUACIÓN

Se lleva a cabo en tres oportunidades, antes de cada Evaluación a través de preguntas conceptuales, ejercicios y problemas que cada alumno desarrolla en forma independiente. Además dispone de la clave de corrección correspondiente a fin de evaluar y juzgar su propio rendimiento.

EVALUACIÓN INTEGRADORA

CONDICIONES PARA LOGRAR LA REGULARIDAD

Para obtener la condición de alumno regular el estudiante debe:

- Aprobar las tres Evaluaciones en su primera instancia o en las de Recuperación, programadas con el régimen establecido precedentemente, y
- Tener asignado concepto bueno, muy bueno, o excelente en los Trabajos Grupales o Individuales.

EXAMEN FINAL

El Examen Final se hace efectivo por medio de un examen individual oral o escrito sobre los temas del programa analítico, por los alumnos que posean la condición de regular en la misma, en las fechas fijadas por la Facultad. Al asignar el puntaje en esta instancia, se tiene en cuenta: participación, interés, cumplimiento, trabajo cooperativo y resultados de las evaluaciones. La escala de valoración del Examen Final es de 0 a 10 puntos.

EXAMEN LIBRE

El Examen Libre se lleva a cabo en las fechas fijadas por la Facultad. Consiste en dos evaluaciones de carácter individual.

Evaluación Práctica: ejercicios y problemas sobre los temas del Programa Analítico de la asignatura, en forma escrita.

Evaluación Teórica: desarrollos teóricos de temas contenidos en el Programa Analítico, en forma oral.

Para lograr la aprobación de la asignatura, el alumno debe aprobar las dos evaluaciones antes mencionadas. La escala de valoración del Examen Libre es de 0 a 10 puntos.

Lic. Marta Isabel CARRIZO de NEMIÑA