



Universidad Nacional de Santiago del Estero  
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías



**UNIVERSIDAD NACIONAL  
DE  
SANTIAGO DEL ESTERO**

**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y  
TECNOLOGÍAS**

**PLANIFICACIÓN ANUAL 2023**

ASIGNATURA: FUNCIONES REALES

**LICENCIATURA EN MATEMÁTICA  
Plan de Estudio: 2004**

**Equipo cátedra:**

**Profesor adjunto: Benac María José**

**Auxiliar Docente JTP: Arias Sonia**

**Ayudante Estudiantil: -----**



## PLANIFICACIÓN DE LA ASIGNATURA

### 1- IDENTIFICACIÓN:

1.1- Nombre de Asignatura: Funciones Reales

1.2- Carrera: Licenciatura en Matemática

1.3- Plan de Estudios: 2004

1.4- Año académico: 2023

1.5- Carácter: obligatoria

1.6- Ubicación de la Asignatura en el Plan de Estudios

1.6.1- Módulo: 6 ° Año: 3°

1.6.2-Área/Bloque/Tramo al que pertenece la Asignatura/Obligación Curricular, según la organización del Plan de Estudios:

ÁREAS/BLOQUE/TRAMO	CARGA HORARIA PRESENCIAL
Ciclo básico	
Ciclo de orientación	8 horas semanales
CARGA HORARIA TOTAL DE LA ACTIVIDAD CURRICULAR	120

Tabla 1: Carga horaria por área/bloque/tramo

1.6.3-Correlativas

1.6.3.1 Anteriores: Análisis Matemático IV

1.6.3.2. Posteriores: Análisis Funcional

1.7- Carga horaria:

1.7.1. Carga horaria semanal total

1.7.1.1. Presencial: 8 horas

1.7.1.2. No Presencial: 0

1.7.2. Carga horaria semanal destinada a la formación práctica

1.7.2.1. Presencial: 4 horas

1.7.2.2. No Presencial: 0

1.7.3. Carga horaria total dedicada a la formación práctica: 60 horas.



**1.8. Ámbitos donde se desarrollan las actividades de formación práctica a las que se hace referencia en el punto anterior.**

Las actividades de formación práctica se realizan en el aula.

**1.9. Indique si la asignatura se dicta en más de una comisión: única comisión.**

## **2- PRESENTACIÓN**

### **2.1- Ubicación de la Asignatura como tramo de conocimiento de una disciplina**

La asignatura Funciones Reales es un tramo del Análisis Real y tiene como parte esencial la medida y la integral de Lebesgue.

La teoría de la medida y de la integración desarrollada por Henri Lebesgue a principios del siglo XX, representan un aporte de gran importancia al análisis matemático moderno. La medida y la integración de Lebesgue tienen muchas ventajas sobre la integración ordinaria de Riemann tanto en las aplicaciones como en la teoría misma, ya que permitió superar las dificultades que presentaba la noción clásica de integral. Es considerada indispensable en los fundamentos de varios campos de la matemática, como por ejemplo la Teoría de las Probabilidades y la Estadística, las series e integrales de Fourier y las Ecuaciones Diferenciales. Es también requerida, en la actualidad, para el tratamiento de muchos problemas de ciencias y de ingeniería.

### **2.2- Conocimientos y habilidades previas que permiten encarar el aprendizaje de la Asignatura.**

Para iniciarse en el estudio de la asignatura Funciones Reales, se requiere que el estudiante maneje con fluidez conceptos y resultados impartidos en las asignaturas Álgebra I, Álgebra II, Análisis Matemático I, II, III y IV y Topología.

### **2.3- Aspectos del Perfil Profesional del Egresado a los que contribuye la asignatura**

El/la licenciado/a en matemática es un/a profesional que:

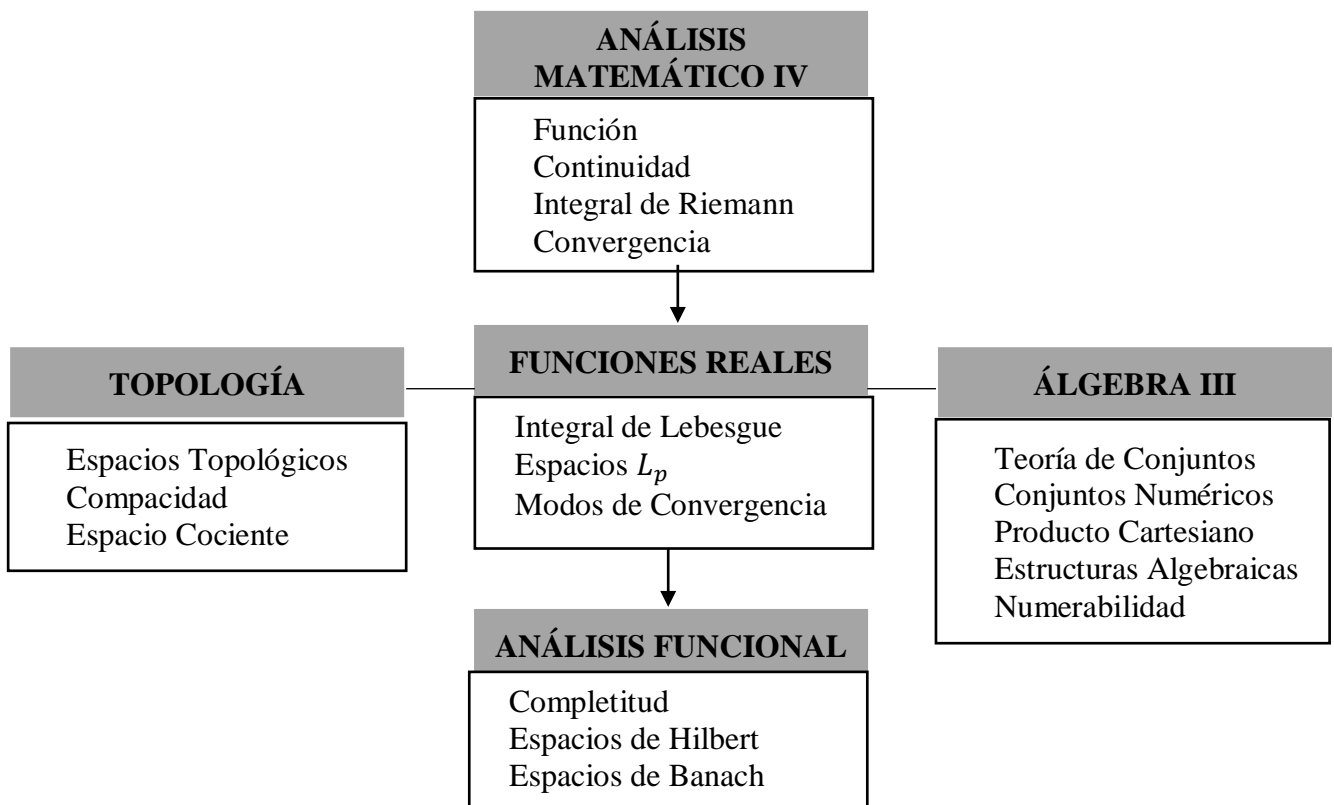
- Posee sólidos conocimientos teóricos y prácticos sobre la Ciencia Matemática y las disciplinas que componen su campo del saber.
- Está preparado para establecer relaciones con otros campos disciplinares con los que se vincula la Matemática.
- Está en condiciones de efectuar interacciones con otras ciencias, desde la perspectiva de su formación para resolver problemas interdisciplinarios que demanden su intervención.
- Desarrolla conocimientos mediante su participación en la realización de estudios y en Proyectos de Investigación aplicando el método científico.
- Aplica y recrea conocimientos para resolver problemas teórico - prácticos en los que se requiera la metodología de la ciencia Matemática.



- f) Contribuye a la transmisión del conocimiento en la Universidad y en el nivel terciario no universitario.

Funciones reales contribuye directa e indirectamente en estos aspectos, puesto que para abordar el estudio de la misma y obtener la regularización y posterior aprobación, se requiere del manejo y fluidez de conceptos impartidos en diversas asignaturas. Así también, es requerida para estudiar problemas complejos que requieren de un análisis multidisciplinario.

#### 2.4- Integración horizontal y vertical con otras asignaturas.



### 3- OBJETIVOS

#### OBJETIVOS GENERALES

- Capacidad para adquirir los conceptos básicos y esenciales de la teoría de la medida y de la integración de Lebesgue.
- Habilidad para relacionar y aplicar los conocimientos adquiridos con rigor científico.
- Habilidad y capacidad de razonamiento y abstracción.
- Capacidad para generar estrategias para plantear y resolver problemas.
- Capacidad para reafirmar el sentido de respeto por las personas y por el medio ambiente.



- Capacidad para actuar con compromiso en sus estudios y en la búsqueda de la calidad de vida de la sociedad.

### OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Capacidad para reconocer funciones medibles y realizar operaciones con ellas.
- Capacidad para aplicar el concepto de medida y las propiedades de la medida.
- Habilidad para comprender aquellas afirmaciones que son verdaderas en casi todo punto.
- Habilidad para identificar a las funciones simples y medibles, y saber determinar su representación standard.
- Habilidad en el cálculo de integrales de funciones simples, medibles y no negativas y de funciones medibles y no negativas, en un espacio de medida.
- Habilidad para aplicar tanto el Teorema de Beppo Levi (Teorema de la Convergencia Monótona) como el Lema de Fatou.
- Capacidad para comprender el concepto de función sumable o integrable y el de la integral de estas funciones.
- Capacidad de analizar sucesiones de funciones integrables y aplicar el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue cuando corresponda.
- Habilidad para reconocer los espacios vectoriales normados  $L_p$  con  $1 \leq p < \infty$ ,  $L_\infty$  y realizar operaciones en ellos.
- Capacidad para manejar los conceptos de convergencia en  $L_p$ .
- Habilidad para descomponer medidas, para extender medidas y para determinar la medida de un espacio producto.
- Habilidad para desarrollar estrategias, tácticas y procesos de razonamiento, propios del pensamiento matemático, para el análisis, planteo, modelación matemática y resolución de problemas.
- Capacidad de trabajar en forma cooperativa.

## 4- SELECCIÓN Y ORGANIZACIÓN DE CONTENIDOS

### 4.1- Contenidos mínimos establecidos en el Plan de Estudios para la Asignatura:

Medida de conjuntos. Medida de Lebesgue. Conjuntos medibles. Extensión de una medida. Funciones medibles. Integral de Lebesgue. Teoría de Diferenciación. Integral de Stieltjes. Funciones sumables. Integrales de Riemann-Darboux.

### 4.2- Programa Sintético sobre la base de los contenidos mínimos

**Unidad N° 1: ESPACIOS MEDIBLES.** Conjuntos medibles. Funciones medibles.

**Unidad N° 2: MEDIDAS.** Medida de conjuntos. Medida de Lebesgue.



**Unidad N° 3: LA INTEGRAL.** Integral de Lebesgue. Integral de Stieltjes. Funciones sumables. Integrales de Riemann-Darboux.

**Unidad N° 4: ESPACIOS  $L_p$ .**

**Unidad N° 5: MODOS DE CONVERGENCIA.**

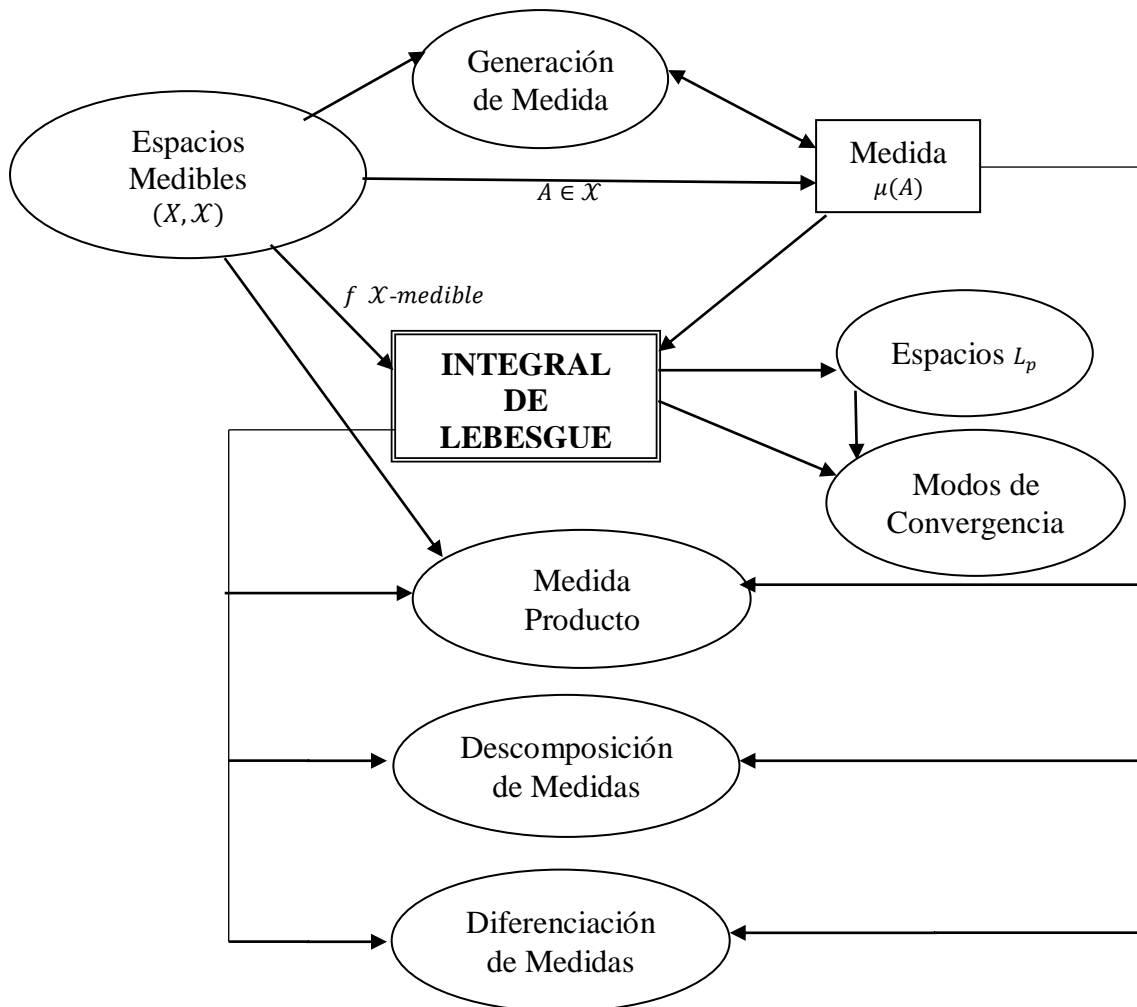
**Unidad N° 6: MEDIDA PRODUCTO.**

**Unidad N° 7: GENERACIÓN DE MEDIDAS.** Extensión de una medida.

**Unidad N° 8: DESCOMPOSICIÓN DE MEDIDAS Y CARGAS.**

**Unidad N° 9: DIFERENCIACIÓN DE MEDIDAS.** Teoría de Diferenciación.

#### 4.3- Articulación Temática de la Asignatura





#### 4.4- Programa Analítico

##### **Unidad N° 1: ESPACIOS MEDIBLES.**

Álgebra.  $\sigma$ -álgebras, espacios medible. Conjuntos medibles y funciones medibles. Operaciones algebraicas y sucesiones de funciones medibles. Funciones simples.  $\sigma$ -álgebras de Borel. Conjuntos de Borel y funciones borelianas.

##### **Unidad N° 2: MEDIDAS.**

Medidas, espacios de medida. Propiedades verdaderas en casi todo punto.

##### **Unidad N° 3: LA INTEGRAL.**

Integral de funciones no negativas medibles. Teorema de Beppo Levi (Teorema de la Convergencia Monótona) y Lema de Fotou. Funciones integrables a valores reales. Linealidad de la integral. Cargas. Propiedades. Funciones sumables. Teorema de convergencia dominada. Integral de Stieltjes. Integrales de Riemann-Darboux. Comparación con la integral de Riemann. Integración de familias de funciones que dependen de un parámetro.

##### **Unidad N° 4: ESPACIOS $L_p$ .**

Espacios lineales normados. Desigualdad de Hölder y de Minkowski. Definición de los espacios normados  $L_p$ . Teorema de completitud. El espacio  $L_\infty$ .

##### **Unidad N° 5: MODOS DE CONVERGENCIA.**

Convergencia uniforme, puntual, en casi todo punto, en  $L_p$ , en medida y casi uniforme. Relaciones entre los distintos tipos de convergencia. Teorema de Egorov y teorema de convergencia de Vitali.

##### **Unidad N° 6: MEDIDA PRODUCTO.**

$\sigma$ -álgebra producto, existencia de medidas producto. Secciones de conjuntos y funciones medibles. Lema de la clase monótona. Teorema de Tonelli y Fubini. Medidas producto de Lebesgue y su completación.

##### **Unidad N° 7: GENERACIÓN DE MEDIDAS.**

Medida exterior. Medidas en álgebras. Extensión de medidas. Teorema de Caratheodory y Teorema de Extensión de Hahn. La medida exterior de Lebesgue y la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ : propiedades de invarianza y regularidad. Existencia de conjuntos no medibles Lebesgue. Existencia de conjuntos no Borelianos medibles Lebesgue.

##### **Unidad N° 8: DESCOMPOSICIÓN DE MEDIDAS Y CARGAS.**

Teorema de descomposición de Hahn y Jordan. Variación total. Medidas absolutamente continuas y medidas singulares. El teorema de Radon-Nikodym. El teorema de descomposición de Lebesgue.



### Unidad N° 9: DIFERENCIACIÓN DE MEDIDAS.

Derivada simétrica de una carga. Función maximal de Hardy-Littlewood. Teorema maximal. Puntos de Lebesgue. Teorema de diferenciación de Lebesgue. Funciones de variación total acotada y absolutamente continuas. Teorema fundamental del cálculo.

#### 4.5- Cronograma para el desarrollo de las Unidades Temáticas

UNIDAD	CARGA HORARIA	CRONOGRAMA DE DICTADO
1- ESPACIOS MEDIBLES	16 horas	15, 18, 22 y 25 de agosto
2- MEDIDA	16 horas	29 de agosto, 1, 5 y 8 de septiembre
3- LA INTEGRAL DE LEBESGUE	24 horas	12, 15, 19, 22, 26 y 29 de septiembre
4- ESPACIOS $L_p$	16 horas	3, 6, 10 y 13 de octubre
5- MODOS DE CONVERGENCIA	16 horas	17, 20, 24 y 27 de octubre
6- MEDIDA PRODUCTO	8 horas	31 de octubre y 3 de noviembre
7- GENERACIÓN DE MEDIDAS	8 horas	7 y 10 de noviembre
8- DESCOMPOSICIÓN DE MEDIDAS Y CARGAS	8 horas	14 y 17 de noviembre
9- DIFERENCIACIÓN DE MEDIDAS	8 horas	21 y 24 de noviembre
<b>TOTAL</b>	<b>120 horas</b>	

Tabla 2: Cronograma para el desarrollo de las unidades temáticas

#### 4.6- Programa y cronograma de formación práctica

ACTIVIDAD	CARGA HORARIA	CRONOGRAMA DE DESARROLLO
Trabajo Práctico N° 1 (unidad 1)	8 horas	18 y 25 de agosto
Trabajo Práctico N° 2 (unidad 2)	8 horas	1 y 8 de septiembre
Trabajo Práctico N° 3 (unidad 3)	12 horas	15, 22 y 29 de septiembre
Trabajo Práctico N° 4 (unidad 4)	8 horas	6 y 13 de octubre
Trabajo Práctico N° 5 (unidad 5)	8 horas	20 y 27 de octubre
Trabajo Práctico N° 6 (unidad 6)	4 horas	3 de noviembre
Trabajo Práctico N° 7 (unidad 7)	4 horas	10 de noviembre
Trabajo Práctico N° 8 (unidades 8 y 9)	8 horas	17 y 24 de noviembre
<b>TOTAL</b>	<b>60 horas</b>	

Tabla 3: Cronograma para el desarrollo de las actividades prácticas

### 5- BIBLIOGRAFÍA.

TÍTULO	AUTORES	EDITORIAL	EJEMPLARES DISPONIBLES	AÑO DE EDICIÓN
The elements of integration and Lebesgue measure	Bartle Robert	John Wiley and Sons, Inc.	1	1966
Media e	Fava, Norberto	Red Olímpica.	1	1996





Integral de Lebesgue	Zo, Felipe	Olimpíadas Matemática Argentina		
Measure Theory	Holmos, Paul R.	D. Van Nostrand Company, Inc.	1	1950
Análisis Real y Complejo	Rudin, walter	Mc Graw-Hill Book Co.	1	1987
Measure and integral. An introduction to real analysis, Pure and Applied Mathematics	Wheeden, Richard Zygmund, Antoni	Marcel Dekker Inc.	1	1977

Tabla 4: Bibliografía

## 6- ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS.

### 6.1- Aspectos pedagógicos y didácticos

Para llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura, la estrategia metodológica adoptada es la de combinar técnicas de trabajo individual y grupal con apoyo informático, y clases de consultas expositivas orientadoras (en temas que por su complejidad necesitan de la explicación del docente).

En las clases teórico-prácticas se desarrollan temáticas previstas en la programación analítica mediante el trabajo individual y/o clases expositivo-dialogadas. Los estudiantes participan en demostraciones de teoremas bajo la dirección del docente. En las clases prácticas los alumnos analizan y resuelven ejercicios y problemas de aplicación planteados en las Guías de Trabajos Prácticos, bajo la supervisión y asesoramiento del docente. En horarios de consulta, el docente resuelve las dudas de los alumnos y crea un clima propicio para que el proceso de incorporación, de aplicación y de transferencia de conocimientos sea significativo.

### 6.2- Mecanismos para la integración de docentes

Se propicia reuniones con docentes de las asignaturas Análisis Matemático IV y Análisis Funcional, correlativa anterior y posterior, respectivamente, para acordar como abordar contenidos de intereses comunes.

### 6.3- Recursos Didácticos

Los recursos usados en el desarrollo de las actividades de la asignatura Funciones Reales son:



- Bibliografía.
- Notas de la Cátedra.
- Guías de Trabajos Prácticos.
- Aula Virtual.

Entre estos recursos didácticos tiene prioridad la bibliografía recomendada, la que constituye una fuente indispensable para el estudio del Análisis Real.

Las Notas de la cátedra son documentos elaborados por la cátedra y permiten el abordaje teórico de los temas.

La Guía de Trabajo Práctico es documento elaborado por la cátedra con ejercicios prácticos y problemas de aplicación a resolver por los estudiantes.

El Aula virtual es herramientas de comunicación 2.0, tanto asíncrona como síncrona, interpersonal como en masas. En la misma se encuentra información referida la cátedra, a la asignatura y el material necesario para los estudiantes.

## 7- EVALUACIÓN

### 7.1- Evaluación Diagnóstica

No se realiza

### 7.2- Evaluación Formativa

Se lleva a cabo mediante trabajos grupales o individuales. Estas tareas consisten en demostraciones de propiedades y la resolución de problemas de aplicación. El docente registra la participación de cada estudiante teniendo presente los criterios de evaluación y le asigna un concepto de acuerdo a la escala de valoración correspondiente.

## EVALUACIONES PARCIALES.

### 7.3- Evaluación Parcial

#### 7.3.1- Programa de Evaluaciones Parciales

Se ha previsto dos Evaluaciones Teórico-Prácticas y la Recuperación de cada una de ellas. Estas consisten en preguntas conceptuales y en ejercicios y/o problemas. Y una Evaluación Práctica Domiciliaria, con posibilidad de rehacer una única vez.

<b>Evaluaciones parciales</b>	<b>CRONOGRAMA DE DESARROLLO</b>
Primer parcial	Del 25 al 29 de septiembre
Recuperatorio primer parcial	Del 9 al 13 de octubre
Segundo Parcial	Del 6 al 10 de noviembre



Recuperatorio segundo parcial	Del 20 al 24 de noviembre
Evaluación práctica domiciliaria	Del 13 al 24 de noviembre

### 7.3.2- Criterios de Evaluación

Los contenidos que se tienen presente para evaluar el proceso de apropiación de saberes son:

#### Contenidos conceptuales

- Comprensión y aplicación de conceptos con rigor científico.
- Demostraciones de teoremas con razonamiento lógico-matemático.
- Conocimiento y manejo fluido del lenguaje lógico-formal de la Matemática.

#### Contenidos procedimentales

- Análisis, interpretación y modelación matemática de problemas.
- Estrategias y procesos de razonamiento.
- Representación gráfica a través de diagramas y tablas.

#### Contenidos actitudinales

- Aportes personales.
- Dedicación puesta de manifiesto en clase.
- Participación en el grupo.
- Respeto por los integrantes del grupo y por el medio ambiente.

### 7.3.3- Escala de Valoración

La escala de valoración de los Trabajos Grupales o Individuales y de la Evaluación Práctica Domiciliaria es (E) Excelente, MB (Muy Bueno), B (Bueno), I (Insuficiente). Las Evaluaciones y Recuperaciones son escritas, desarrolladas por los estudiantes en forma individual, y calificadas con escala de 0 a 100 puntos. Se considera aprobado el alumno que alcance 60 puntos o más, y desaprobado el de menos de 60 puntos.

### 7.4- Evaluación Integradora

No se realiza

### 7.5- Evaluación Sumativa

#### 7.5.1- Condiciones para lograr la promoción sin Examen Final de la Asignatura.

La asignatura no cuenta con promoción sin examen final



### **7.5.2- Condiciones para lograr la Regularidad de la Asignatura.**

Para obtener la condición de alumno regular el estudiante debe:

- Aprobar las dos Evaluaciones en su primera instancia o en las de Recuperación, programadas con el régimen establecido precedentemente, y
- tener asignado concepto bueno, muy bueno, o excelente en los Trabajos Grupales o Individuales y en la Evaluación Parcial Domiciliaria.

### **7.6- Examen Final**

El Examen Final se hace efectivo por medio de un examen individual oral o escrito sobre los temas del programa analítico, por los alumnos que posean la condición de regular en la misma, en las fechas fijadas por la Facultad. Al asignar el puntaje en esta instancia, se tiene en cuenta: participación, interés, cumplimiento, trabajo cooperativo y resultados de las evaluaciones. La escala de valoración del Examen Final es de 0 a 10 puntos.

### **7.7- Examen Libre**

El Examen Libre se lleva a cabo en las fechas fijadas por la Facultad. Consiste en dos evaluaciones de carácter individual.

Evaluación Práctica: ejercicios y problemas sobre los temas del Programa Analítico de la asignatura, en forma escrita.

Evaluación Teórica: desarrollos teóricos de temas contenidos en el Programa Analítico, en forma oral.

Para lograr la aprobación de la asignatura, el alumno debe aprobar las dos evaluaciones antes mencionadas. La escala de valoración del Examen Libre es de 0 a 10 puntos.

***Benac María José***  
*Apellido y Nombre del Prof. responsable de Asignatura*